

確率過程における Digital Homology と Cohomology とその応用

研究期間 平成 29 年度～平成 年度

研究代表者名 松田 健

共同研究者名

1. はじめに

位相幾何学において、Homology や Cohomology は図形が持つ特徴を表す不変量であり、近年では純粋数学以外の分野において、応用トポロジーとして様々な分野で応用のための研究が進められている。位相幾何学では、不変量を用いて図形を分類する。例えば、単体的複体を用いて構成する Homology Group を考える場合、正三角形と直角三角形の Homology Group としての不変量 (Homology Group の次元) は同じものになる。正三角形と直角三角形を区別するには、距離のような何らかの尺度を用いることで、Persistence Homology と呼ばれる概念を考えることで、Homology Group を用いる方法が知られている。いずれの場合でも、Homology Group を計算するために、連立一次方程式を計算する必要があり、データが大量になればなるほど、Homology の不変量を計算するためのコストは増大する。本研究では、何らかの外的要因によって確率的に変化を続ける図形の変化の特徴を確率過程として表現することを目的としており、リアルタイムに変化する図形の不変量をトレースするために、高速に不変量を計算する手法を確立した。なお、手計算の場合は、レトラクションと呼ばれる作業を繰り返すことでグラフは単純化され、計算量を減らすことが可能である。しかしながら、計算機を利用してグラフ G の不変量を計算する場合は、別の工夫が必要であり、本研究で開発した不変量の計算方法はレトラクションとは異なる方法で不変量を低コストに算出することが可能である。

2. 成果と今後の課題

コンピュータ上で描画される 2 次元空間上の図形は、大量のドットを用いて表現されている。ドットはそのピクセルの座標データとして表現されており、便宜的に隣り合う座標を辺で繋げることで、2 次元空間上の図形は、頂点の座標集合 V と上述のようにして構成される辺集合 E からなるグラフ $G=(V, E)$ と見做することができる。このようにして表現されるグラフは、プログラミングやツールを用いて生成されたグラフの場合、ノイズはほとんど観測されないが (曲線を表現するときのギザギザは除く)、タッチペンなどによる手書き図形の場合はノイズが含まれることが多い。そこで、本研究では、以下の手順でグラフ G を再構成することで、デジタルデータ化された図形の不変量を算出する方法を提案した。

[手順]

1. マウス座標データを第 4 象限からはみ出ない範囲に平行移動する.
2. $50(i - 1) \leq x \leq 50i, 50(j - 1) \leq y \leq 50j$ の領域にマウス座標データが 1 個含まれているとき, それらの座標データを (T_{xi}, T_{yj}) に置き換える.ただし, i, j は 1 以上の自然数とし, $50 | T_{xi}, 50 | T_{yj}$ であるとする.
3. 変換した座標データを頂点とし, 時系列に整理して隣り合う頂点を辺で結ぶことで, グラフを生成する.

より詳細な内容については文献[1]に記している. なお, 上述のアルゴリズムを実装し, 以下のウェブサイトで公開している. なお, 公開中のシステムはアルゴリズムの一部の実装となっているため, 今後 Cohomology Group の計算まで可能になるように改良を進めていく.

<http://binarylab.sakura.ne.jp/tri/scatter.html>

参考文献

- [1] 松田健, 園田道夫, “GUI ツール利用時のマウスカーソル軌跡データの幾何学的考察と状態推定の可能性”, 平成 29 年度統計数理研究所共同利用研究「不確実状況下での動的状態推定と知能情報科学の融合」